

Unde elastice. Acustica. II

Notiuni teoretice:

Ecuatia undelor este:

$$\Psi(x, t) = A \sin(\omega t - kx) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

unde k este numarul (vectorul) de unda, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ($\frac{rad}{m}$), v este viteza de propagare a undei in diferite medii, A este amplitudinea unde, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\vartheta$ este pulsatia proprie a undei, T este perioada, ϑ este frecventa, $\lambda = v \cdot T$ este lungimea de unda (distanta dintre doua maxime consecutive).

Viteza de propagare a undelor in diferite medii:

- viteza de propagare a undelor transversale in medii solide, pentru care o dimensiune este mult mai mare decat restul este:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Unde F este forta ce tensioneaza mediu (in cazul nostru o coarda vibranta, extrem de lunga), iar $\mu = \frac{m}{L}$ este densitatea liniara a corzii, ce are masa m si lungimea L .

- Viteza de propagare a undelor longitudinale in medii solide este: $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ unde E este modulul lui Young, iar ρ este densitatea materialului prin care se propaga unda. Viteza de propagare a undelor depinde de caracteristicile materialelor.
- Viteza de propagare a undei in gaze depinde de coeficientul de compresibilitate γ a gazului, de presiunea existenta si de densitatea gazului

$$v = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$$

- Viteza de propagare a undei in lichide este: $v = \sqrt{\frac{\chi}{\rho}}$. Si aceasta depinde de proprietatile mediului in care se propaga prin coeficientul de compresibilitate si densitatea lui.

Impedanta acustica: $Z = \rho \cdot v$ si este o caracteristica de material.

Presiunea sonora efectiva este: $p = \frac{p_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{\rho v A \omega}{\sqrt{2}}$ unde p_{max} reprezinta amplitudinea presiunii sonore (presiunea maxima a undei sonore).

$$\text{Intensitatea undei sonore este: } I = \frac{\rho v \omega^2 A^2}{2} = \frac{p^2}{\rho v} = \frac{p^2}{Z}$$

Nivelul sonor $N_s = 10 \log \frac{I}{I_0}$ unde I este intensitatea undei sonore, iar I_0 reprezinta intensitatea pragului de audibilitate:

$$I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$$

Puterea undei sau fluxul sonor $P = I \cdot S = \frac{W}{t}$, iar densitatea de energie $w = \frac{W}{v}$.

Atenuarea nivelului sonor reprezinta diferenta intre doua nivele sonore, intre emitator si receptorul sunetului. Daca valoarea acestei marimi este negativa, atunci suntem in cazul atenuarii – sunetul se aude mai slab, iar daca in urma calculului valoarea acesteia este pozitiva, vom fi in cazul amplificarii sunetului- sunetul se aude mai tare decat cel initial.

$$N_A = N_{s1} - N_{s2} = 10 \log \frac{I_1}{I_0} - 10 \log \frac{I_2}{I_0} = \log \frac{I_1}{I_2} \text{ (dB)}$$

1. Ecuația unei unde sonore longitudinale ce pleacă de la un difuzor ce generează nota muzicală „Si” poate fi scrisă sub forma:

$$\psi(x, t) = 0.02 \sin 1000\pi \left(t - \frac{x}{340} \right) \text{ (mm)}$$

Se cere:

- a). să se precizeze mărimile ondulatorii: amplitudine -A, frecvență unghiulară - ω , frecvență - ϑ , perioadă - T, viteză -v, lungime de undă - λ și număr de undă -k.
 b). să se afle elongația moleculelor de aer aflate la distanța $x = 8,5\text{cm}$ de difuzor, la momentul $t = 2 \cdot 10^{-3}\text{s}$.

Raspuns:

- a). Prin identificare cu forma generală a ecuațiilor undelor:

$$\Psi(x, t) = A \sin(\omega t - kx) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$A = 0.02 \text{ mm}$$

Obs.: In cazul in care avem alte unitati de masura decat cele din sistemul international, aceste influenteaza doar valoarea amplitudinii.

$$\omega = 1000\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad \vartheta = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1000\pi}{2\pi} = 500 \text{ Hz}; \quad T = \frac{1}{\vartheta} = \frac{1}{500} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$v = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad \lambda = v \cdot T = 340 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 0.68 \text{ m}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{1000\pi}{340} = 9.34 \text{ m}^{-1}$$

b)

$$\Psi(x, t) = 0.02 \sin 1000\pi \left(2 \cdot 10^{-3} - \frac{0.085}{340} \right) = 0.02 \sin \pi \left(2 - \frac{1}{4} \right) = 0.02 \sin \frac{7\pi}{4} = 0.02 \cdot (-2\sqrt{2}) = -0.0141 \text{ mm}$$

2. Într-o șină de cale ferată cu modulul de elasticitate de $12.8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$ și densitatea de 8 kg/dm^3 se propagă unde longitudinale având lungimea de undă de 4m. Cunoșcând amplitudinea undei $A = 400 \text{ \AA}$, se cere:

- a). viteza de propagare a undei, frecvența și vectorul de undă;
 b). ecuația undei și a oscilației unui punct aflat la distanța de 41 m de sursă;
 c). defazajul temporar și unghiular între oscilațiile a două puncte aflate la distanțele $x_1 = 9\text{m}$ și respectiv $x_2 = 12\text{m}$ de sursă.

Raspuns:

$$a) \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{12.8 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^3}} = \sqrt{16 \cdot 10^6} = 4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vartheta = \frac{v}{\lambda} = \frac{4000}{4} = 1000 \text{ Hz}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ m}^{-1}; \quad \omega = 2\pi\vartheta = 2\pi \cdot 1000 = 2000\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$b) \quad \Psi(x, t) = A \sin(\omega t - kx) = 4 \cdot 10^{-8} \sin(2000\pi t - \frac{\pi}{2} x)$$

$$\Psi(x = 41, t) = 4 \cdot 10^{-8} \sin \left(2000\pi t - \frac{\pi}{2} \cdot 41 \right) = 4 \cdot 10^{-8} \sin \left(2000\pi t - \frac{\pi}{2} - 20\pi \right) = 4 \cdot 10^{-8} \sin(2000\pi t - \frac{\pi}{2})$$

$$c) \quad \Delta t = \frac{x_2}{v} - \frac{x_1}{v} = \frac{11-9}{4000} = \frac{2}{4000} = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 0.5 \text{ ms}; \quad \Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t = 2000\pi \cdot 0.5 \cdot 10^{-3} = \pi \text{ rad}$$

3. Care este lungimea de undă a unui sunet cu frecvența $\nu = 440\text{Hz}$ (nota muzicală La) în aer, în apa dintr-o țeavă și în pereții țevii din oțel, dacă vitezele sunetului în cele trei medii sunt 340m/s , 1460m/s și respectiv 5000m/s . Care este presiunea aerului ($\rho = 1.22 \text{ kg/m}^3$, $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1.4$), modulul de compresibilitate al apei ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$) și modulul de elasticitate al oțelului din care este confecționată țeava ($\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$)

Raspuns:

Lungimea de unda este:

$$\lambda = v \cdot T = v \cdot \frac{1}{\vartheta} \Rightarrow \lambda_{aer} = \frac{v_{aer}}{\vartheta} = \frac{340}{440} = 0.773 \text{ m}; \quad \lambda_{apa} = \frac{1460}{440} = 3.32 \text{ m}; \quad \lambda_{otel} = \frac{5000}{440} = 11.36 \text{ m}$$

$$v_{aer} = \sqrt{\gamma \frac{p_{aer}}{\rho_{aer}}} \Rightarrow p_{aer} = \frac{v_{aer}^2 \cdot \rho_{aer}}{\gamma} = \frac{340^2 \cdot 1.22}{1.4} = 1.007 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 750 \text{ mmHg}$$

$$v_{apa} = \sqrt{\frac{\chi_{apa}}{\rho_{apa}}} \Rightarrow \chi_{apa} = v_{apa}^2 \cdot \rho_{apa} = 1460^2 \cdot 1000 = 2.13 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$v_{otel} = \sqrt{\frac{E}{\rho_{otel}}} \Rightarrow E_{otel} = v_{otel}^2 \cdot \rho_{otel} = 5000^2 \cdot 7800 = 1.95 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

4. O coardă întinsă vibrează după ecuația:

$$y = 8 \cdot 10^{-3} \sin 10x \cdot \cos 750t \text{ (m)}$$

Se cere:

- amplitudinea și viteza undelor componente a căror interferență (superpoziție) generează această vibrație (undă staționară);
- care este lungimea de undă și lungimea corzii (distanța între nodurile de la capete);
- care este viteza punctului de pe coardă aflat la $x=5$ cm de capătul corzii, la momentul $t=8$ ms= $8 \cdot 10^{-3}$ s,

Raspuns:

a), Unda staționată pe o coardă este dată de ecuația (este rezultatul interferenței dintre două unde, una progresivă în direcția pozitivă a axei x , și una regresivă - ce se propaga în direcția negativă a axei x):

$$y = 2A \sin kx \cdot \cos \omega t$$

Prin identificare se găsește:

$$A=4 \text{ mm}; k = 10 \text{ m}^{-1}; \omega = 750 \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \vartheta = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{750}{2 \cdot 3.14} = 119.37 \text{ Hz}$$

$$k = \frac{\omega}{v} \Rightarrow v = \frac{\omega}{k} = \frac{750}{10} = 75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{b) } k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3.14}{10} = 0.628 \text{ m} = 62.8 \text{ cm}$$

Distanța dintre nodurile de la capete este egală cu lungimea corzii și cu $\lambda/2$ pentru modul fundamental:

$$l = \frac{\lambda}{2} = \frac{0.628}{2} = 0.314 \text{ m} = 31.4 \text{ cm}$$

$$\text{c) } v_{osc} = \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} = 750 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \sin 10x \cdot (-\sin 750t) = -6 \sin 10x \cdot \sin 750t$$

Pentru un punct ce oscilează la distanța $x = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ și $t = 8 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ vom obține viteza de oscilație a punctului:

$$v_{osc} = \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} = -6 \sin 10 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 750 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = -6 \sin 5 \sin 6 = -6 \cdot 0.479 \cdot (-0.279) = 0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5. Într-un punct din câmpul sonor se măsoară presiunea sonoră $p=2$ Pa. Știind că sunetul are frecvența

de 1000Hz și viteza în aer ($\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$) este de 340m/s, se cere:

a). impedanța acustică a aerului și lungimea de undă;

b). amplitudinea oscilațiilor moleculelor din câmpul sonor;

c). intensitatea și nivelul sonor (se cunoaște valoarea pragului de audibilitate $I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$); densitatea de energie sonică.

Raspuns:

$$\text{a) Impedanta acustica este: } Z = \rho \cdot v = 1.3 \cdot 340 = 442 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$$

$$\text{Lungimea de unda este } \lambda = \frac{v}{\vartheta} = \frac{340}{1000} = 0.34 \text{ m}$$

b) Cunoscând presiunea sonoră a undei, stim relația dintre presiunea maximă și amplitudine.

$$p = \frac{p_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{\rho v A \omega}{\sqrt{2}} \Rightarrow A = \frac{p \sqrt{2}}{\rho v \omega} = \frac{p \sqrt{2}}{\rho v 2\pi \vartheta} = \frac{p}{\rho v \sqrt{2} \pi \vartheta} = \frac{2}{1.3 \cdot 340 \cdot \sqrt{2} \cdot 3.14 \cdot 1000} = 1.02 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$\text{c) } I = \frac{\rho v \omega^2 A^2}{2} = \frac{p^2}{\rho v} = \frac{p^2}{Z} = \frac{2^2}{442} = 9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$N_s = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{9 \cdot 10^{-3}}{10^{-12}} = 10 \log 9 \cdot 10^9 = 10 (\lg 9 + 9 \lg 10) = 99.5 \text{ dB}$$

$$\text{Densitatea de energie sonora este: } w = \frac{W}{V}; I = |\vec{p}| = w \cdot v \Rightarrow w = \frac{I}{v} = \frac{9 \cdot 10^{-3}}{440} = 2.65 \cdot 10^{-5} \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

6. Nivelul sonor la ascultarea muzicii în căști nu trebuie să depășească 50dB. Care este presiunea sonoră admisă și fluxul sonor (puterea sonoră) admis, dacă secțiunea transversală a urechii este de 10 cm^2 . Se cunosc: $I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$, $\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$, $v=340$ m/s.

Raspuns:

$$I = \frac{p^2}{\rho v} \Rightarrow p_0 = \sqrt{I_0 \rho v} = \sqrt{10^{-12} \cdot 1.3 \cdot 340} = 2.1 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$$

$$N_s = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{p^2}{p_0^2} = 20 \log \frac{p}{p_0} \Rightarrow \frac{p}{p_0} = 10^{\frac{N_s}{20}}$$

$$p = p_0 \cdot 10^{\frac{N_s}{20}} = 2.1 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{\frac{50}{20}} = 2.1 \cdot 10^{\frac{5}{2}} = 6.64 \cdot 10^{-3} Pa$$

Puterea undei (sau energia dezvoltată de unda în unitatea de timp):

$$P = \frac{W}{t}$$

$$I = \frac{W}{t \cdot S} = \frac{P}{S} \Rightarrow P = I \cdot S \Rightarrow \frac{I}{I_0} = 10^{\frac{N_s}{10}} = 10^5 \Rightarrow I = I_0 \cdot 10^5 = 10^{-12} \cdot 10^5 = 10^{-7} \frac{W}{m^2}$$

$$P = I \cdot S = 10^{-7} \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 10^{-10} W$$

7. Lângă un difuzor presiunea sonoră maximă este de 0,34 N/m, iar până la un observator sunetul suferă o atenuare de 20 dB. Care va fi intensitatea și nivelul sunetului la observator ($I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$, $\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$, $v=340$ m/s.).

Raspuns:

Intensitatea sunetului la sursă este:

$$I = \frac{p^2}{\rho v} = \frac{p_{max}^2}{2\rho v} = \frac{0.34^2}{2 \cdot 1.3 \cdot 340} = \frac{0.34 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 3.14} = 1.3 \cdot 10^{-4} \frac{W}{m^2}$$

Nivelul atenuării reprezintă diferența dintre nivelul sonor la sursă și cel la observator:

$$N_A = N_{s1} - N_{s2} = 10 \log \frac{I_1}{I_0} - 10 \log \frac{I_2}{I_0} = \log \frac{I_1}{I_2} \Rightarrow I_2 = I_1 \cdot 10^{-\frac{N_A}{10}} = 1.3 \cdot 10^{-6} \frac{W}{m^2}$$

$$N_{s2} = 10 \log \frac{I_2}{I_0} = 10 \log \frac{1.3 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} = 10 (\log 1.3 + \log 10^6) = 10(0.1 + 6) = 61 \text{ dB}$$

8. În fața unui microfon un sunet are presiunea sonoră de 0,442 Pa. Ce amplificare este necesară pentru a ajunge la pragul de durere. ($I_p = 10^2 \frac{W}{m^2}$, $Z = 442 \frac{kg}{m^2 \cdot s}$).

Raspuns:

Intensitatea sunetului în fața microfonului este:

$$I = \frac{p^2}{\rho v} = \frac{p^2}{Z} = \frac{0.442^2}{442} = 442 \cdot 10^{-6} = 4.42 \cdot 10^{-4} \frac{W}{m^2}$$

Nivelul amplificării reprezintă diferența dintre cele două nivele sonore:

$$N_A = N_p - N_s = 10 \log \frac{I_p}{I_0} - 10 \log \frac{I_2}{I_0} = 10 \log \frac{I_p}{I_2} = 10 \log \frac{10^2}{4.42 \cdot 10^{-4}} = 53.5 \text{ dB}$$